

Aufgabe 1: Eigenschaften der Wavelet-Transformation

(EigenschaftenWavelet)

In Gl. (1) (Abschnitt 1.1) wird die Wavelet-Transformation als Zeit-Frequenz-Darstellung gegeben. Untersuchen Sie für diese Darstellung die Eigenschaften

- a) Translationsinvarianz und
- b) Affininvarianz.

Lösung

Nach Gl. (1) gilt:

$$W_{x_s}^{\psi}(\tau, f) = \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_{\psi}}(t - \tau) + t_{\psi} \right) dt$$

a) Translationsinvarianz:

Es gilt $x_s(t) = x(t - t_s)$. Daraus folgt:

$$W_{x_s}^{\psi}(\tau, f) = \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_s) \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_{\psi}}(t - \tau) + t_{\psi} \right) dt$$

Mit der Substitution $t' = t - t_s$ folgt:

$$\begin{aligned} W_{x_s}^{\psi}(\tau, f) &= \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_{\psi}}(t' + t_s - \tau) + t_{\psi} \right) dt' \\ &= \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_{\psi}}(t' - (\tau - t_s)) + t_{\psi} \right) dt' \\ &= W_x^{\psi}(\tau - t_s, f) \end{aligned}$$

Eine Verschiebung der Zeitfunktion um t_s bewirkt also eine Verschiebung der Wavelet-Transformierten um die gleiche Zeit t_s .

b) Affininvarianz:

Es gilt $x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} x\left(\frac{t}{s}\right)$. Daraus folgt:

$$W_{x_s}^{\psi}(\tau, f) = \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \cdot \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t}{s}\right) \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_{\psi}}(t - \tau) + t_{\psi} \right) dt$$

Mit der Substitution $t' = \frac{t}{s}$ folgt:

$$W_{x_s}^{\psi}(\tau, f) = \begin{cases} \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \cdot \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_{\psi}}(t' \cdot s - \tau) + t_{\psi} \right) s \cdot dt' & \text{falls } s > 0 \\ \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \cdot \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\infty}^{-\infty} x(t') \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_{\psi}}(t' \cdot s - \tau) + t_{\psi} \right) s \cdot dt' & \text{falls } s < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \sqrt{\left|\frac{f}{f_\psi}\right|} \cdot \frac{s}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_\psi} (t' \cdot s - \tau) + t_\psi \right) dt' & \text{falls } s > 0 \\ \sqrt{\left|\frac{f}{f_\psi}\right|} \cdot \frac{-s}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_\psi} (t' \cdot s - \tau) + t_\psi \right) dt' & \text{falls } s < 0 \end{cases} \\
&= \sqrt{\left|\frac{f}{f_\psi}\right|} \cdot \sqrt{|s|} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \psi^* \left(\frac{f}{f_\psi} (t' \cdot s - \tau) + t_\psi \right) dt' \\
&= \sqrt{\left|\frac{f \cdot s}{f_\psi}\right|} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \psi^* \left(\frac{f \cdot s}{f_\psi} \left(t' - \frac{\tau}{s} \right) + t_\psi \right) dt' \\
&= W_x^\psi \left(\frac{\tau}{s}, f \cdot s \right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

- a) Bestimmen Sie die Wavelet-Transformierte des Signals $x(t) = \exp(-\alpha t^2)$ mithilfe des Gabor-Wavelets

$$\psi(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t^2\right) \exp(j2\pi f_0 t).$$

- b) Kann das Signal $x(t)$ aus der Wavelet-Transformierten mithilfe des Gabor-Wavelets rekonstruiert werden?

Aufgabe 2: Wavelet-Trafo einer Exponentialfunktion

- b) Eine Rekonstruktion ist nicht möglich, da das Gabor-Wavelet die Zulässigkeitsbedingung $C_\psi < \infty$ nicht erfüllt.

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df < \infty \quad \rightarrow \quad \Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

→ Die Mittelwertfreiheit des Wavelets ist eine notwendige Bedingung für die Zulässigkeit. Dies ist beim Gabor-Wavelet nicht erfüllt.

Aufgabe 3: Multiraten-Filterbank

(MultiratenFilterbank)

Das treppenförmige Signal

$$x_0(t) = \sum_{m=0}^7 c_0(m) (\sigma(t - mT) - \sigma(t - (m+1)T))$$

mit

$$c_0(0) = 0 \quad c_0(1) = 2 \quad c_0(2) = 3 \quad c_0(3) = 4 \quad c_0(4) = 4 \quad c_0(5) = 3 \quad c_0(6) = 2 \quad c_0(7) = 0$$

soll mithilfe einer Multiraten-Filterbank in seine Approximationen und Details zerlegt werden. Die Filterkoeffizienten sind vorgegeben:

$$g_{TP}(-1) = +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_{TP}(0) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_{BP}(-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_{BP}(0) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Das zugehörige Wavelet ist definiert als

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Skalierungsfunktion als

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Zerlegen Sie das Signal $x_0(t)$ mithilfe der Multiraten-Filterbank in die Approximationskoeffizienten $c_k(m)$ und die Detailkoeffizienten $d_k(m)$, $k = 1, 2, 3$.
- b) Berechnen und zeichnen Sie die Projektionen des Signals $x_0(t)$ auf die Funktionenräume V_k und W_k ($k = 1, 2, 3$):

$$x_k(t) = \text{Proj}_{V_k} \{x_0(t)\}$$

$$y_k(t) = \text{Proj}_{W_k} \{x_0(t)\}$$

- c) Rekonstruieren Sie das Signal $x_0(t)$ zeichnerisch durch Addition von $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ und $x_3(t)$.

Lösung

- a) Zunächst werden die Filter mithilfe diskreter δ -Impulse dargestellt:

$$g_{TP}(m) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta(m) + \delta(m+1))$$

$$g_{BP}(m) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta(m) - \delta(m+1))$$

Iterationsvorschrift zur Berechnung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_{k+1}(l) &= c_k(2l) *_{\text{m}} g_{\text{TP}}(2l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k(m) g_{\text{TP}}(2l - m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k(m) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta(2l - m) + \delta(2l - m + 1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_k(2l) + c_k(2l + 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{k+1}(l) &= c_k(2l) *_{\text{m}} g_{\text{BP}}(2l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k(m) g_{\text{BP}}(2l - m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k(m) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta(2l - m) - \delta(2l - m + 1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_k(2l) - c_k(2l + 1)) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 & 2 \end{bmatrix} & d_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ c_2 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 9 \end{bmatrix} & d_2 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 5 \end{bmatrix} \\ c_3 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 18 & d_3 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 0 \end{aligned}$$

- b)** Die Projektionen in die Funktionenunterräume V_k bzw. W_k entsprechen Reihenentwicklungen in die zeitverschobenen Skalierungs- bzw. Waveletfunktionen, die mit k skaliert wurden:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{m=0}^{2^{3-k}-1} c_k(m) \varphi_{m,k}(t) = \sum_{m=0}^{2^{3-k}-1} c_k(m) 2^{-k/2} \varphi(2^{-k}t - mT) \\ y_k(t) &= \sum_{m=0}^{2^{3-k}-1} d_k(m) \psi_{m,k}(t) = \sum_{m=0}^{2^{3-k}-1} d_k(m) 2^{-k/2} \psi(2^{-k}t - mT) \end{aligned}$$

Als Hilfe für die zeichnerische Konstruktion werden die Größen $2^{-k/2}c_k(m)$ bzw. $2^{-k/2}d_k(m)$ berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot c_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 3,5 & 3,5 & 1 \end{bmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot d_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \cdot c_2 &= \begin{bmatrix} 2,25 & 2,25 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \cdot d_2 &= \begin{bmatrix} -1,25 & 1,25 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot c_3 &= 2,25 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot d_3 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Signale, die in Abb. L3 gezeigt sind.

- c)** Durch die Addition entsteht wieder das Signal $x_0(t)$.

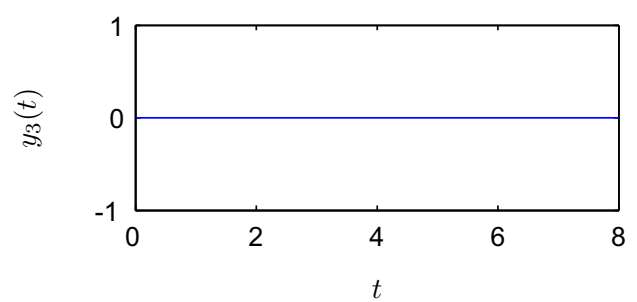
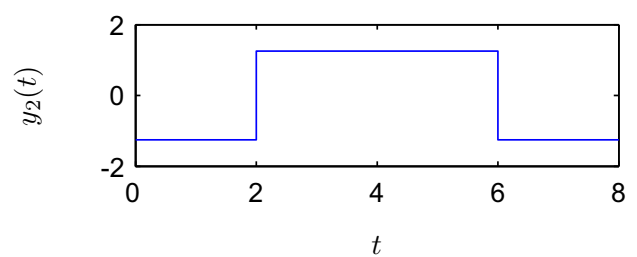
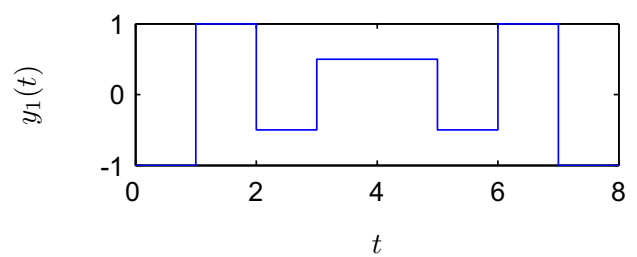
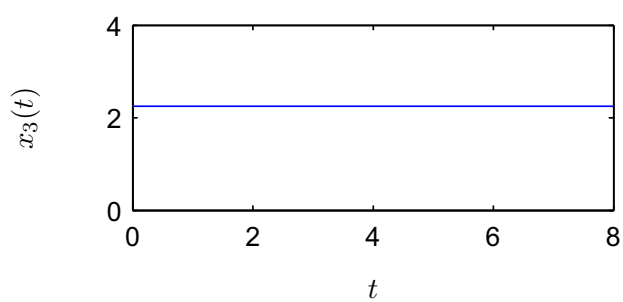
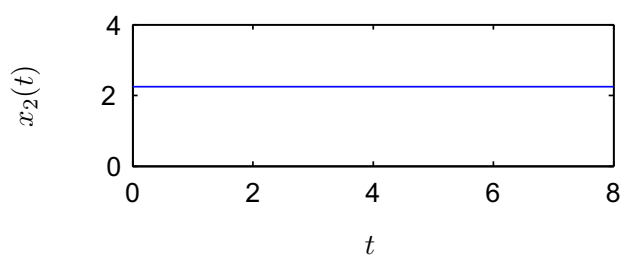
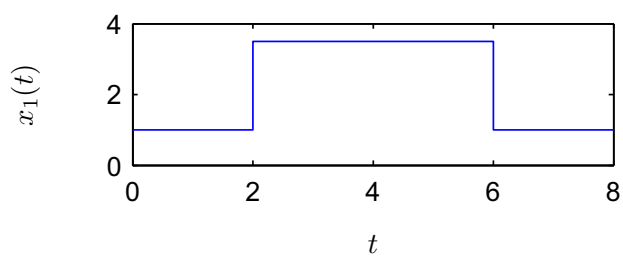
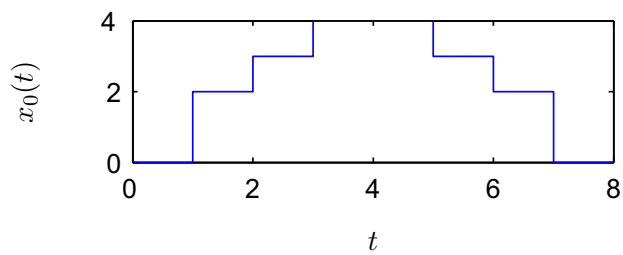


Abbildung L3: Approximationen und Details

MUSTERLOESUNG